

В.П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, д-р. фіз.-мат. наук, проф., ХНТУСГ, Харків;
С.В. ОЛЬШАНСЬКИЙ, канд. фіз.-мат. наук, доц., НТУ «ХПІ»

ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ОСЦИЛЯТОРА ЗМІННОЇ МАСИ ПРИ НАЯВНОСТІ СУХОГО ТЕРТЯ

Виведено наближені формули для розрахунку вільних затухаючих коливань осцилятора лінійно-змінної маси при дії сили сухого тертя. Побудовано графіки затухаючих коливань осцилятора в залежності від часу. Проведено порівняння числових результатів, отриманих за допомогою наближених формул і шляхом прямого чисельного інтегрування вихідного диференціального рівняння руху.

Ключові слова: осцилятор, лінійно-змінна маса, сухе тертя, функції Бесселя.

Вступ. Експлуатація машин у різних галузях промисловості дає багато прикладів, коли маса окремих ланок машин і механізмів може змінюватись при їх роботі, особливо якщо враховувати масу продукту, який піддається обробці в даному процесі [1]. Сюди можна віднести землерийні машини в гірничорудній та вугільній промисловості, машини-дозатори з автоматичним завантаженням та розвантаженням, різноманітні будівельні машини, вібраційні та віброударні машини типу конвеєрів, сепараторів, класификаторів, машини допоміжного обладнання прокатних станів, машини металургійної та ливарної промисловості, сільськогосподарські машини, центрифуги, механізми автоматичних ваг та ін.

У літературі в основному опубліковано дослідження вільних коливань систем монотонно змінних параметрів з одним ступенем свободи з урахуванням в'язкого лінійного опору [2], [3], а також параметричні коливання [4], [5], що виникають при періодичній зміні параметрів у часі.

Метою роботи є побудова формул для розрахунку вільних коливань осцилятора лінійно-змінної маси з сухим тертям.

Постановка задачі Коші та побудова її розв'язку. Горизонтальне переміщення осцилятора на шорсткій горизонтальній площині без урахування реактивної сили описуємо диференціальним рівнянням

$$(m_0 + \delta t)\ddot{x} + \mu g(m_0 + \delta t)\text{sign } \dot{x} + cx = 0. \quad (1)$$

В (1) m_0 – початкова маса осцилятора; $\delta > 0$ – швидкість зміни маси в часі t ; μ – коефіцієнт сухого тертя; c – коефіцієнт жорсткості пружини; g – прискорення вільного падіння; x – горизонтальне переміщення осцилятора, яке відраховується по вісі Ox від торця недеформованої пружини довжиною l ; точкою над x позначено похідні по t (див. рис. 1).

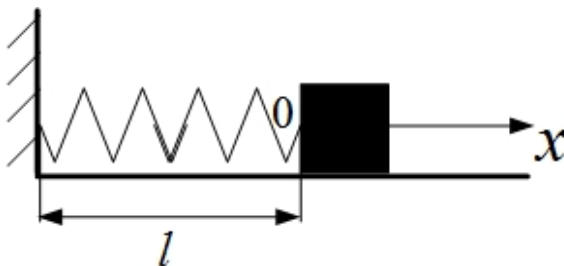


Рис. 1 – Розрахункова схема.

Рівняння (1) розв'язуємо за початкових умов:

$$x(0) = x_0 < 0; \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (2)$$

При русі осцилятора вправо, коли $\dot{x} > 0$, а $t \in [0; t_1]$, рівняння (1) зводиться до форми:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m_0 + \delta t} x = -\mu g. \quad (3)$$

Його розв'язок шукаємо у вигляді

$$x = y - \frac{\mu g}{c} (m_0 + \delta t), \quad (4)$$

де y задовольняє однорідному рівнянню

$$\ddot{y} + \frac{c}{m_0 + \delta t} y = 0. \quad (5)$$

Перейдемо в (5) до нової змінної $\xi = m_0 + \delta t$. Це перетворення дає

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + \frac{c}{\delta^2} \frac{y}{\xi} = 0. \quad (6)$$

Загальним розв'язком (6) є:

$$y = \eta [c_1 J_1(\eta) + c_2 Y_1(\eta)], \quad (7)$$

де $\eta = a\sqrt{\xi}$; $a = \frac{2}{\delta}\sqrt{c}$; $J_1(\eta), Y_1(\eta)$ – функції Бесселя і Неймана індексів одиниця; c_1, c_2 – довільні сталі.

Таким чином, згідно (4) і (7), рівняння (3) має розв'язок

$$x = \eta [c_1 J_1(\eta) + c_2 Y_1(\eta)] - \frac{\mu g}{ca^2} \eta^2. \quad (8)$$

Рух осцилятора вправо відбувається зі швидкістю:

$$\dot{x} = \frac{\delta a^2}{2} \left[c_1 J_0(\eta) + c_2 Y_0(\eta) - \frac{2\mu g}{ca^2} \right], \quad (9)$$

де $J_0(\eta)$, $Y_0(\eta)$ – функції Бесселя та Неймана нульового індексу.

При диференціюванні виразу (8) по t , врахували, що [6]

$$\frac{d}{dt} = \frac{\delta a^2}{2\eta} \frac{d}{d\eta}; \quad \frac{d}{d\eta}[\eta J_1(\eta)] = \eta J_0(\eta); \quad \frac{d}{d\eta}[\eta Y_1(\eta)] = \eta Y_0(\eta).$$

Останній доданок в (9) малий порівняно з іншими доданками. Тому, з метою подальшого спрощення задачі, швидкість руху осцилятора будемо визначати за наближеною формулою

$$\dot{x} = \frac{\delta a^2}{2} [c_1 J_0(\eta) + c_2 Y_0(\eta)]. \quad (10)$$

Підпорядковуючи розв'язок (8) та його наближену похідну (10) початковим умовам (2), отримуємо систему:

$$c_1 J_1(\eta_0) + c_2 Y_1(\eta_0) = \frac{1}{\eta_0} \left(x_0 + \frac{\mu g m_0}{c} \right), \quad (11)$$

$$c_1 J_0(\eta_0) + c_2 Y_0(\eta_0) = 0,$$

в якій $\eta_0 = a\sqrt{m_0}$.

Визначник системи (11) виражається через елементарні функції [6]

$$J_1(\eta_0) Y_0(\eta_0) - J_0(\eta_0) Y_1(\eta_0) = \frac{2}{\pi \eta_0}.$$

Для обчислення сталих c_1 і c_2 з (11) отримуємо формули:

$$c_1 = \frac{\pi}{2} \left(x_0 + \frac{\mu g m_0}{c} \right) Y_0(\eta_0); \quad c_2 = -\frac{\pi}{2} \left(x_0 + \frac{\mu g m_0}{c} \right) J_0(\eta_0). \quad (12)$$

Щоб знайти час зупинки при русі осцилятора вправо потрібно, згідно (10), розв'язати трансцендентне рівняння:

$$c_1 J_0(\eta) + c_2 Y_0(\eta) = 0,$$

яке, з урахуванням (12), перетворюється в

$$\frac{Y_0(\eta)}{J_0(\eta)} = \frac{Y_0(\eta_0)}{J_0(\eta_0)}. \quad (13)$$

Корінь рівняння (13) $\eta = \eta_1$ незначно відрізняється від $\eta_0 \pm \pi$. Тому, поклавши

$$\eta_1 = \eta_0 \pm \pi + \varepsilon, \quad (14)$$

для обчислення малого ε , отримуємо наближену формулу

$$\varepsilon = \frac{J_0(\eta_0) Y_0(\eta_0 \pm \pi) - J_0(\eta_0 \pm \pi) Y_0(\eta_0)}{J_0(\eta_0) Y_1(\eta_0 \pm \pi) - Y_0(\eta_0) J_1(\eta_0 \pm \pi)}. \quad (15)$$

Знак «+» відповідає зростанню маси осцилятора, а знак «-» – зменшенню маси.

Тривалість руху осцилятора вправо дорівнює

$$t_1 - t_0 = \frac{1}{\delta} \left(\frac{\eta_1^2}{a^2} - m_0 \right), \quad t_0 = 0. \quad (16)$$

При зупинці осцилятор відхилиться вправо на відстань:

$$x_1 = \eta_1 \left[c_1 J_1(\eta_1) + c_2 Y_1(\eta_1) \right] - \frac{\mu g}{ca^2} \eta_1^2, \quad (17)$$

а його маса стає рівною

$$m_1 = \left(\frac{\eta_1}{a} \right)^2.$$

Якщо $cx_1 > \mu m_1 g$, то далі осцилятор буде рухатись вліво, на протязі часу $t \in [t_1; t_2]$, згідно виразу:

$$x = -\eta \left[b_1 J_1(\eta) + b_2 Y_1(\eta) \right] + \frac{\mu g}{ca^2} \eta^2. \quad (18)$$

Тепер $\eta = a\sqrt{\xi}$; $\xi = m_1 + \delta(t - t_1)$;

$$b_1 = -\frac{\pi}{2} \left(x_1 - \frac{\mu g m_1}{c} \right) Y_0(\eta_1); \quad b_2 = \frac{\pi}{2} \left(x_1 - \frac{\mu g m_1}{c} \right) J_0(\eta_1). \quad (19)$$

Тривалість часу руху осцилятора вліво складає:

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{\delta} \left(\frac{\eta_2^2}{a^2} - m_1 \right), \quad (20)$$

Значення η_2 пов'язане зі значенням η_1 і його обчислення зводиться до формул, аналогічних (14), (15):

$$\eta_2 = \eta_1 \pm \pi + \zeta; \quad (21)$$

$$\zeta = \frac{J_0(\eta_1)Y_0(\eta_1 \pm \pi) - J_0(\eta_1 \pm \pi)Y_0(\eta_1)}{J_0(\eta_1)Y_1(\eta_1 \pm \pi) - J_1(\eta_1 \pm \pi)Y_0(\eta_1)}.$$

Відхилення осцилятора вліво та його маса при зупинці дорівнюють відповідно:

$$x_2 = -\eta_2 \left[b_1 J_1(\eta_2) + b_2 Y_1(\eta_2) \right] + \frac{\mu g}{ca^2} \eta_2^2; \quad m_2 = \left(\frac{\eta_2}{a} \right)^2. \quad (22)$$

Умовою подальшого руху осцилятора вправо є дотримання нерівності $c|x_2| > \mu g m_2$. При виконанні цієї нерівності переміщення осцилятора вправо, як і раніше, описується виразом (8), але $\xi = m_2 + \delta(t - t_2)$, $t \in [t_2; t_3]$.

Обчислюючи c_1 і c_2 за формулами (12), в них треба замінити m_0 на m_2 ; x_0 на x_2 . Значення η_3 і t_3 визначені виразами (14) і (16), але в (14) η_0

потрібно замінити на η_2 , а в (16) – η_1 на η_3 і m_0 – на m_2 . При обчисленні x_3 за формулою (17) туди треба замість η_1 підставити η_3 . В крайньому правому положенні, де $x = x_3$, маса осцилятора дорівнює $m_3 = (\eta_3 / a)^2$.

Якщо виявиться, що $cx_3 > \mu g m_3$, то процес руху осцилятора вліво зводиться до застосування формул (20) – (22) з заміною попереднього ξ на $\xi = m_3 + \delta(t - t_3)$, $t \in [t_3, t_4)$ і $m_1, m_2, x_1, \eta_1, \eta_2, t_1, t_2$ відповідно на $m_3, m_4, x_3, \eta_3, \eta_4, t_3, t_4$.

Таким чином, використовуючи отримані формули, не складно розрахувати процес затухаючих коливань осцилятора до повної зупинки.

Результати моделювання. Для проведення розрахунків приймаємо наступні вихідні дані: $m_0 = 3$ кг; $c = 1962$ Н/м; $x_0 = -0,0615$ м; $\mu = 0,3$, $\delta = 2,5$ кг/с.

В таблиці представлено результати чисельного інтегрування рівняння (1) (чисельники) та результати, отримані за допомогою наближених формул (12) – (22) (знаменники).

Таблиця – Порівняння результатів чисельного та аналітичного розв’язків

j	t_j , с	m_j , кг	x_j , м
0	$\frac{0}{0}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{-0,0615}{-0,0615}$
1	$\frac{0,126}{0,126}$	$\frac{3,315}{3,315}$	$\frac{0,053}{0,053}$
2	$\frac{0,258}{0,258}$	$\frac{3,645}{3,645}$	$\frac{-0,044}{-0,044}$
3	$\frac{0,397}{0,397}$	$\frac{3,991}{3,992}$	$\frac{0,034}{0,034}$
4	$\frac{0,542}{0,542}$	$\frac{4,354}{4,354}$	$\frac{-0,022}{-0,022}$
5	$\frac{0,693}{0,693}$	$\frac{4,733}{4,732}$	$\frac{0,008}{0,008}$
6	$\frac{0,833}{0,850}$	$\frac{5,083}{5,126}$	$\frac{0,006}{0,006}$

Числові значення в таблиці засвідчують високу точність наближених аналітичних формул

На рис. 2 нанесено залежності переміщень від часу при $\delta = \pm 2,5$ кг/с відповідно при зростанні (пунктирна лінія) та зменшенні маси (суцільна лінія).

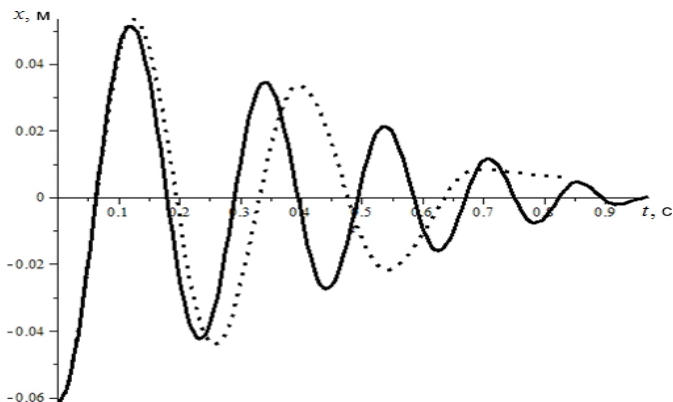


Рис. 2 – Залежність переміщення осцилятора від часу за $\delta = \pm 2,5$ кг/с.

З рис.2 видно, що при зменшенні маси осцилятор здійснює 5,5 повних коливань, до зупинки, а при зростанні маси їх значно менше. При цьому період коливань осцилятора зростаючої маси суттєво збільшується у часі.

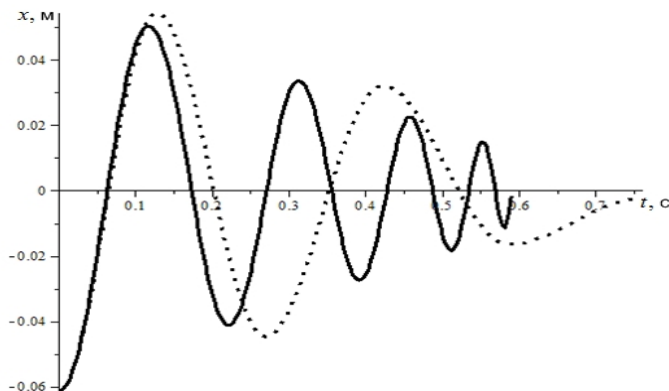


Рис. 3 – Залежність переміщення осцилятора від часу за $\delta = \pm 5$ кг/с.

Залежності на рис. 3 одержані при більш швидкій зміні маси осцилятора. Тут час руху осцилятора до зупинки, при $\delta < 0$, менший, ніж у попередньому прикладі. Це зумовлено обмеженням $m_0 + \delta t > 0$. Тому при зменшенні маси осцилятора кількість його коливань у першому прикладі більша, ніж у другому, де період коливань суттєво зменшується у часі.

Зазначимо, що кількість розмахів (напівколивань) n_* осцилятора сталої маси $m = m_0 = \text{const}$ можна обчислити за формулою:

$$n_* = \left[1/2 \left((c|x|)/(\mu g m_0) + 1 \right) \right],$$

де квадратними дужками позначена ціла частина числа. Тоді, порівнюючи затухання коливань осциляторів змінної і сталої мас, одержуємо наступні результати:

1. Кількість розмахів n при зростанні маси осцилятора не перевищує числа n_* ($n \leq n_*$);
2. Кількість розмахів n при спаданні маси осцилятора не менша числа n_* ($n \geq n_*$).

Наголошуємо, що у другому прикладі розрахунку кількість розмахів n при $\delta < 0$ обмежена не тертям, а зменшенням до нуля маси осцилятора.

Висновки. Задача про вільні коливання осцилятора лінійно-змінної маси з урахуванням сухого тертя має аналітичні розв'язки в функціях Бесселя. Для описання процесу руху доводиться використовувати метод припасовування розв'язків та наближено обчислювати корені трансцендентних рівнянь. Затухаючі коливання осциляторів при збільшенні та зменшенні їх маси суттєво відрізняються.

Список літератури: 1. Бессонов А.П. Основы динамики механизмов с переменной массой звеньев / А.П. Бессонов – М.: Наука, 1967. – 267 с. 2. Cveticanin L. Dynamics of Machines with Variable Mass. / L. Cveticanin. Taylor & Francis Ltd, 1998. – 300 p. 3. Ольшанський В.П. Вільні коливання осцилятора змінної маси. / В.П. Ольшанський, С.В. Ольшанський. Вібрації в техніці та технологіях. Всеукр. наук. техн. журнал. – Вінниця. – Вип. 2 (70), 2013. – С. 57-59. 4. Голоскоков Е.Г. Нестационарные колебания деформируемых систем / Е.Г. Голоскоков, А.П. Филиппов. – К.: Наукова думка, 1977. – 340 с. 5. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем / А.П. Филиппов. – М.: Машиностроение, 1970. – 736 с. 6. Абрамовиц А. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами) / А. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

Надійшла до редколегії 16.09.2013

УДК 534.1

Вільні коливання осцилятора змінної маси при наявності сухого тертя / В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №54 (1027). – С. 172 – 178. Бібліогр.: 6 назв.

Виведені приближенні формули для расчёта свободных затухающих колебаний осцилятора линейно-переменной массы при действии силы сухого трения. Построены графики затухающих колебаний осцилятора в зависимости от времени. Проведено сравнение числовых результатов, полученных при помощи приближенных формул путём прямого численного интегрирования исходного дифференциального уравнения движения.

Ключевые слова: осциллятор, линейно-переменная масса, сухое трение, функции Бесселя.

Approximate formulas for the calculation of free damped oscillator linearly variable mass under the action of dry friction forces are derived. The graphs of damped oscillation as a function of time are constructed. A comparison of numerical results obtained by means of approximate formulas by direct numerical integration of the original differential equations of motion is performed.

Key words: oscillator, linear-variable mass, dry friction, Bessel functions.